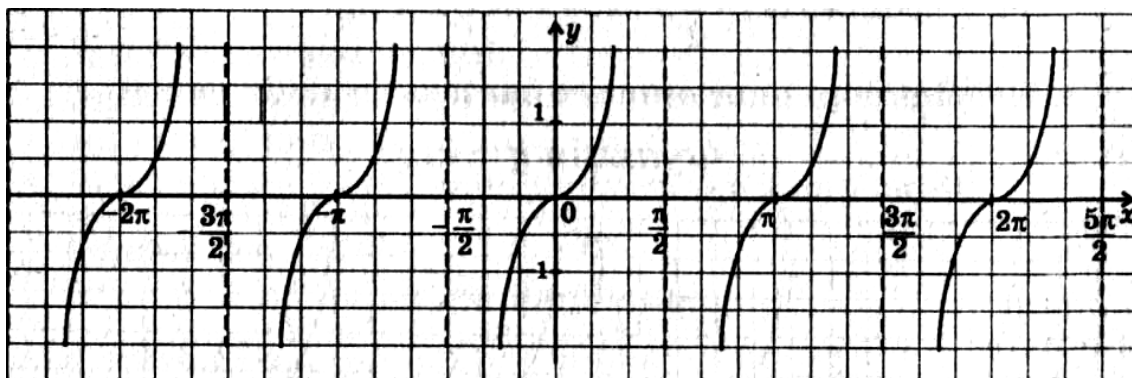


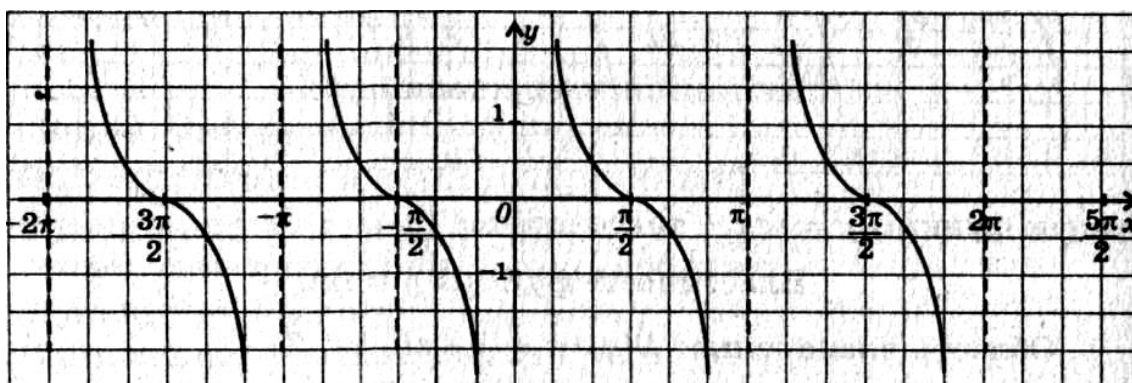
Тема: Властивості та графіки тригонометричних функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$.

Функція $y = \operatorname{tg} x$. Властивості та графік



Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ – тангенсоїда.

Функція $y = \operatorname{ctg} x$. Властивості та графік



Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ – котангенсоїда.

Властивості функції

$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
1. Область визначення: $D(y)$: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.	1. Область визначення: $D(y)$: $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
2. Область значень: $y \in \mathbb{R}$. $D(y) = \mathbb{R}$.	2. Область значень: $y \in \mathbb{R}$. $D(y) = \mathbb{R}$.
3. Функція непарна: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$. Графік симетричний відносно початку координат.	3. Функція непарна: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$. Графік симетричний відносно початку координат.
4. Функція періодична. Найменший	4. Функція періодична. Найменший додатний період $T = \pi$

додатний період $T = \pi$ $tg(x - \pi) = tg(x + \pi) = tgx$. 5. Точки перетину графіка з осями координат: $z Ox: \begin{cases} y = 0, \\ x = \pi k, k \in Z; \end{cases} \quad z Oy: \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$ 6. Проміжки знакосталості: $y > 0$ при $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z$; $y < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right), k \in Z$. 7. Проміжки монотонності: функція зростає на всій області визначення, тобто на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z$. 8. Найбільше і найменшого значень функції не має.	$ctg(x - \pi) = ctg(x + \pi) = ctgx$. 5. Точки перетину графіка з осями координат: $z Ox: \begin{cases} y = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; \end{cases}$ $z Oy$: точок перетину не має 6. Проміжки знакосталості: $y > 0$ при $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z$; $y < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right), k \in Z$. 7. Проміжки монотонності: функція спадає на всій області визначення, тобто на кожному з проміжків $(\pi k; \pi + \pi k), k \in Z$. 8. Найбільше і найменшого значень функції не має.
--	---

Наприклад:

1. Знайти область визначення функції:

а) $y = \sin \sqrt{x+4}$;

б) $y = tg 5x$;

Розв'язання

а) $D(y): x+4 \geq 0$;

$x \geq -4$.

$D(y) = [-4; +\infty)$.

б) $D(y): 5x \neq 0$;

$x \neq 0$.

$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Знайти множину значень функції:

а) $y = \cos 2x$;

б) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язання

а) $E(\cos x) = [-1; 1]$, тоді $E(\cos 2x) = [-1; 1]$;

б) $E(\sin x) = [-1; 1]$, тоді $E\left(\sin x \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) = [-1; 1]$.

3. Знайти найменший додатний період функції:

а) $y = \sin\left(-\frac{3x}{4}\right)$;

б) $y = -tg \frac{2x}{3}$.

Розв'язання

а) Найменший додатний період функції $y = \sin x$ $T = 2\pi$, отже, найменшим додатним періодом функції $y = \sin\left(-\frac{3x}{4}\right)$ є

$$T = \frac{2\pi}{\left|-\frac{3}{4}\right|} = \frac{2\pi \cdot 4}{3} = \frac{8\pi}{3}.$$

б) Найменший додатний період функції $y = tg x$ $T = \pi$, отже, найменшим додатним періодом функції $y = -tg \frac{2x}{3}$ є

$$T = \frac{\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|} = \frac{3\pi}{2}.$$

4. Порівняти числа:

а) $\sin \frac{\pi}{7}$ і $\sin \frac{3\pi}{7}$;

б) $\cos \frac{13\pi}{12}$ і $\cos \frac{23\pi}{12}$;

в) $tg\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ і $tg\left(-\frac{\pi}{8}\right)$;

г) $ctg \frac{\pi}{11}$ і $ctg \frac{11\pi}{12}$.

Розв'язання

а) $\frac{\pi}{7} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $\frac{3\pi}{7} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $\frac{\pi}{7} < \frac{3\pi}{7}$.

На проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функція $y = \sin x$ зростає, тоді більшому значенню аргумента відповідає більше значення функції, а меншому – менше.

Отже, $\sin \frac{\pi}{7} < \sin \frac{3\pi}{7}$.

б) $\frac{13\pi}{12} \in [\pi; 2\pi]$; $\frac{23\pi}{12} \in [\pi; 2\pi]$; $\frac{13\pi}{12} < \frac{23\pi}{12}$.

На проміжку $[\pi; 2\pi]$ функція $y = \cos x$.

Отже, $\cos \frac{13\pi}{12} < \cos \frac{23\pi}{12}$;

$$\text{в) } \frac{\pi}{7} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); \frac{\pi}{8} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); \frac{\pi}{7} > \frac{\pi}{8}.$$

На проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функція $y = \operatorname{tg} x$ зростає.

$$\text{Отже, } \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right) > \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{8}\right).$$

$$\text{г) } \frac{\pi}{11} \in (0; \pi); \frac{11\pi}{12} \in (0; \pi); \frac{\pi}{11} < \frac{11\pi}{12}.$$

На проміжку $(0; \pi)$ функція $y = \operatorname{ctg} x$ спадає.

$$\text{Отже, } \operatorname{ctg} \frac{\pi}{11} > \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{12}$$

Питання самоконтролю

1. Побудувати графіки тригонометричних функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$.
2. Навести властивості функції $y = \operatorname{tg} x$. Довести, що ця функція непарна на проміжках області визначення.
3. Навести властивості функції $y = \operatorname{ctg} x$. Довести, що вона спадна на всіх проміжках області визначення.